Муниципальное общеобразовательное учреждение
гимназия №64

Построение сечений многогранников плоскостью

экзаменационный реферат по геометрии

Выполнил:
Свертков Егор Витальевич
11Б класс

Научный руководитель:

Гаврикова Г.А.

г.Липецк, 2007

Содержание

Введение……...3

1. Понятие изображения и полноты изображения……4

2. Позиционные задачи, основной принцип и схема их решения……..8

3. Опорные позиционные задачи на построение……10

4. Метод следов построения сечений……12

5. Метод внутренних проекций……...14

6. Метод дополнения n-угольной призмы (пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды)……17

7. Метод деления n-угольной призмы (пирамиды) на треугольные призмы (пирамиды)……19

8. Метод параллельных прямых……..21

9. Метод переноса секущей плоскости……..22

Список использованной литературы……...25

Введение

Вся история геометрии и некоторых других разделов математики тесно связана с развитием теории геометрических построений. Важнейшие аксиомы геометрии, сформированные Евклидом около 300 года до нашей эры, ясно показывают, какую роль сыграли геометрические построения в формировании геометрии.
Многовековые неудачные попытки решить классические задачи о квадратуре круга, об удвоении куба, о трисекции угла навели на мысль,что эти задачи вовсе не разрешимы циркулем и линейкой. В связи с этим возникла необходимость выяснить, какие задачи разрешимы циркулем и линейкой. Этот вопрос оказался тесно связанным с алгебраической проблемой разрешимости уравнений.
В настоящее время теория геометрических построений представляет обширную и глубоко развитую область математики, связанную с решением разнообразных принципиальных вопросов, уходящих в другие ветви математики.

1. Понятие изображения и полноты изображения

В планиметрии изображением фигуры Φ_o, называемой оригиналом, считается любая фигура *Ф,* подобная фигуре Φ_o. Сложнее обстоит дело с изображением фигур в стереометрии. В начертательной геометрии детально разработаны различные методы построения изображений. При изучении теории и решении задач **в** школьном курсе геометрии выполнение чертежей **в** какой-либо определенной проекции ни в коей мере не оправдано, и оказывается вполне целесообразным выполнять построение изображений пространственных фигур в произвольной параллельной проекции. Произвольность при этом состоит в том, что положение оригинала относительно плоскости, на которую осуществляется проектирование, и направление проектирования на эту плоскость остаются неопределенными.

Возможность применения такого способа построения изображения следует из теоремы Польке-Шварца, в соответствии с которой:

Любой плоский четырехугольник *ABCD* вместе с его диагоналями может быть принят за параллельную проекцию тетраэдра, подобного тетраэдру $A_QB_QC_QD_Q$ произвольной формы.

Проекционное изображение фигуры Φ_o можно получить, таким образом, не непосредственным проектирванием фигуры Φ_o, а выполняя построения в строгом соответствии **с** законами параллельного проектирования.

Изображением оригинала называют параллельную проекцию фигуры, подобной оригиналу. Таким образом, при построении изображений необходимо учитывать следующие свойства параллельного проектирования:

1. Параллельная проекция точки есть точка.
2. Параллельная проекция прямой есть прямая или точка.
3. Отношение проекций отрезков одной и той же прямой равно отношению самих отрезков.
4. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.
5. Проекциями параллельных отрезков являются параллельные отрезки, причем отношение проекций равно отношению самих отрезков.

Из свойств параллельного проектирования следует, что изображением ромба, квадрата, прямоугольника, параллелограмма является параллелограмм; изображением трапеции является трапеция с тем же отношением оснований, что и у оригинала; изображением окружности является эллипс.

Необходимо знать, что в основе изображения плоских фигур лежат:

Теорема I

Изображением данного треугольника может служить любой треугольник.

Теорема 2

Если на плоскости изображений указаны изображения каких-либо трех точек общего положения плоской фигуры Ф, то изображение любой точки плоскости может быть построено. Изображение фигуры называют верным, если оно получено с соблюдением всех свойств параллельного проектирования. Для изображения пространственной фигуры этого требования недостаточно.

Не всякий верный чертеж дает нам представление о фигуре, о взаимном расположении ее элементов.

Так, например, на рис. 25 и 26 даны верные изображения правильной четырехугольной пирамиды *SABCD,* но только изображение на рис. 26 дает возможность без затруднений судить о взаимном расположении ребер пирамиды, ее диагональных сечений и т. п. Поэтому изображение должно быть не только верным, но и наглядным.

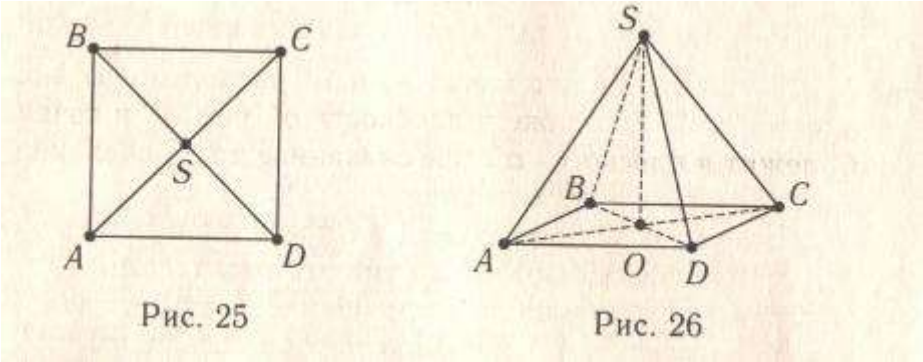


Рис. 25 Рис. 26

Наглядность верного изображения пространственной фигуры в значительной степени содействует усвоению содержания той задачи, которая решается при помощи этого изображения.

С понятием верного изображения тесно связано понятие полноты изображения. Остановимся подробнее на этом понятии.

Пусть в плоскости изображений заданы изображения А, *B, C*
трех точек пространства *A', B', C.*

Ничего определенного об их взаимном расположении сказать нельзя. Положение существенно изменится, если задать изображение а некоторой плоскости а' и указать изображения *Аи* B_x, C_l параллельных проекций A'_v В',, С'] соответственно точек *A', B', C* на плоскости а' (рис. 27).

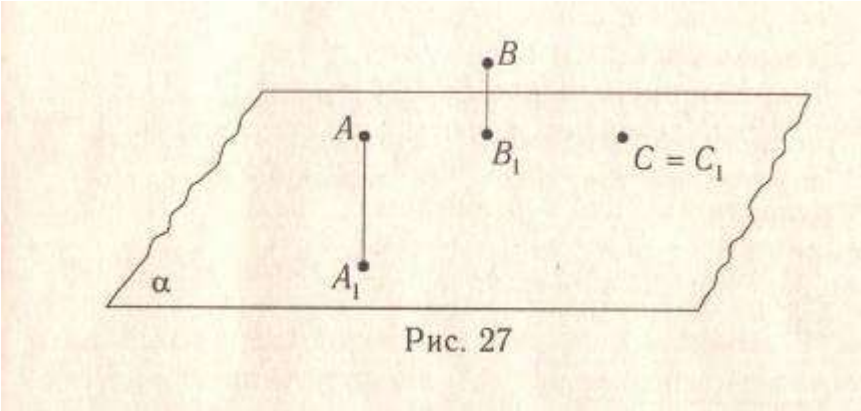


Рис. 27

Теперь видно, что точки *A'* и *B'* расположены вне плоскости а', *B'* ближе к плоскости а', чем *A',* и точка С лежит в плоскости а'. Все сказанное дает основание для следующего определения:

Точку называют заданной на проекционном чертеже, если на нем изображена сама эта точка и ее параллельная проекция на некоторую плоскость, которую называют основной. Проекцию точки на основную плоскость называют ее вторичной проекцией.

Проектирование на основную плоскость называют внутренним. Нужно отметить, что нередко бывает удобно задавать внутреннее центральное проектирование. При этом определения заданной точки и полного изображения остаются аналогичными.

Изображение фигуры называют полным, если каждая точка этой фигуры является заданной, то есть для каждой точки фигуры на чертеже указана или может быть найдена построением ее проекция на основную плоскость. Направление проектирования нужно выбирать одним и тем же для всех точек фигуры. Легко обосновать справедливость следующих двух теорем:

Теорема 3

Для того, чтобы изображение прямой было полным, необходимо и достаточно, чтобы две точки были заданными.

Теорема 4

Для того, чтобы изображение плоскости было полным, необходимо и достаточно, чтобы были заданными три точки, не лежащие на одной прямой.

На основании этих теорем легко убедиться в полноте изображений призмы, пирамиды, конуса и цилиндра. В качестве основной плоскости удобно выбирать плоскость основания, в качестве внутреннего проектирования для призм и цилиндров — параллельное, для пирамид и конусов — центральное проектирование.

Важность введения полноты изображений видна на примере следующих задач.

Задача 1

На рис. 28 **и** 29 изображен куб $ABCDA^{\wedge}B_{l}C_{l}D_{f}$. Ответьте на вопрос: где расположена точка *M?*

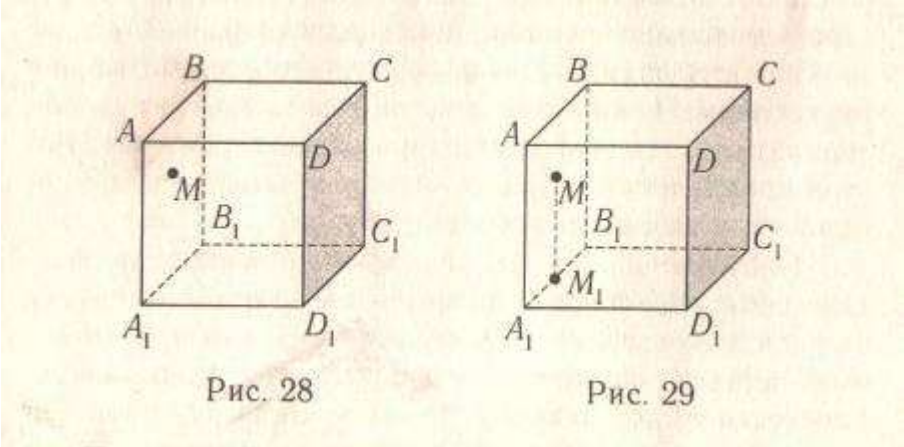


Рис. 28 Рис. 29

По рис. 28 мы не можем дать конкретный ответ. Точка *M* может лежать в любой плоскости грани куба,

а также вне и внутри него, так как изображение точки *M* неполное.

Показанное на рис. 29 изображение является полным, и ответ однозначен: точка *M* лежит в грани $ABB_1A^{\wedge}$.

Задача 2

На рис. 30 и 31 задано изображение четырехугольной пирамиды *SABCD* и прямой *MK*- Какие грани пирамиды пересекает прямая *MK?*

Рис. 31

Заданное на рис. 30 изображение не является полным, и мы не можем определить точки пересечения. На рис. 31 не только изображение пирамиды, но и изображение прямой полное. Прямая *MK* пересекает грани *SAB* и *SBC,* и мы можем построить изображения точек пересечения (рис. 32).

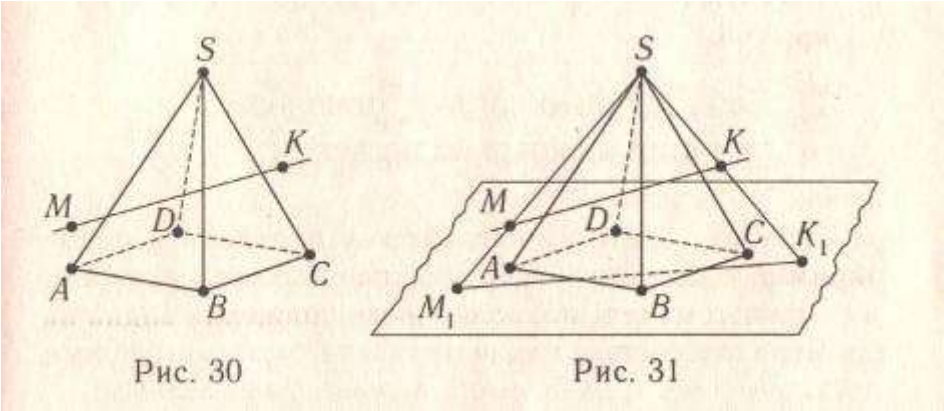


Рис. 30 Рис. 31

Условимся заданные точки изображения записывать в виде *A′(A, A* j), где *A′* — точка оригинала, *A* — **ее** изображение, A_{ℓ} — изображение вторичной проекции.

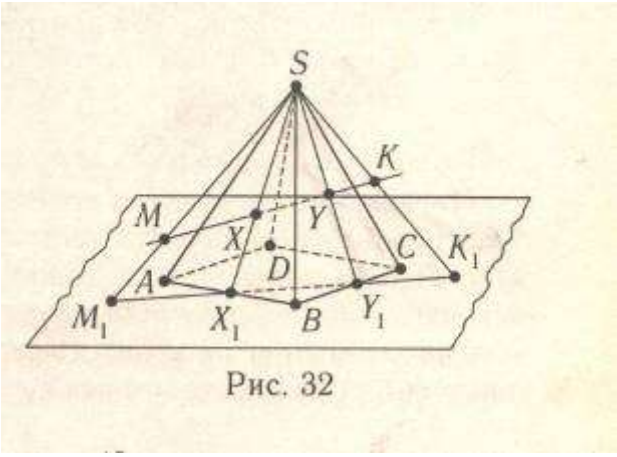


Рис. 32

Итак, по полному изображению мы можем определенным образом судить о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей. Говорят в этом случае, что полный чертеж определяет позиционные свойства оригинала.
Но мы не можем по данному изображению определить расстояние между точками, величину углов, форму оригинала, то есть полные изображения не определяют метрических свойств оригинала.

2. Позиционные задачи, основной принцип и схема их решения

Всякую задачу, где требуется определить общие элементы данных фигур, то есть построить пересечение данных фигур, называют позиционной.

Ясно, чтобы позиционная задача была разрешима, достаточно того, чтобы изображение было полным.

Простейшие позиционные задачи можно рассмотреть на примере построения сечения куба, треугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, расположенными на ребрах данных фигур.

Задача 3

Построить сечение куба плоскостью, которая проходит через точки *K, L, M,* расположенные на его ребрах, как показано на рис. 33 а.

Решение

Проведем прямую *KL* и отметим точки ее пересечения с продолжениями соответствующих ребер куба (рис. 33 б). Получим еще 2 точки, лежащие в плоскости сечения и на продолжении ребер куба. Проводя аналогичным образом прямые в плоскостях других ребер куба (рис. 33 в, г), мы построим все сечение.

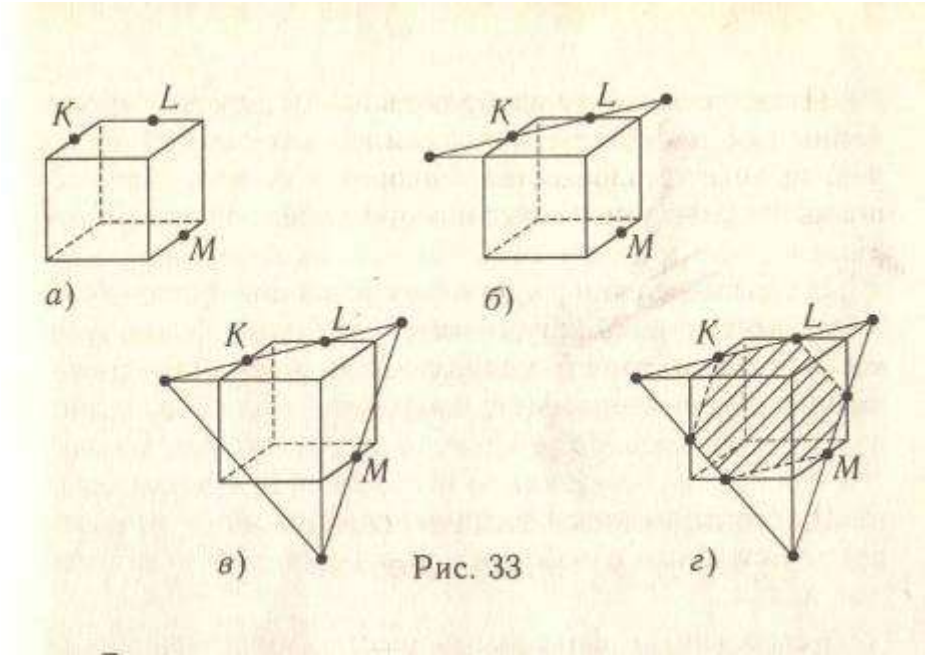


Рис. 33

Более сложными и интересными являются задачи на построение плоских сечений произвольных призм и пирамид плоскостью общего положения. В общем случае секущая плоскость пересекает плоскость каждой грани многогранника и каждую из прямых, на которой лежат ребра многогранника. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника, называют **следом секущей плоскости на плоскости этой грани.** А точку, в которой секущая плоскость пересекает прямую, содержащую какое-нибудь ребро, называют **следом секущей плоскости на этой прямой.** След секущей плоскости на плоскости нижнего основания условимся называть просто **следом секущей плоскости.**

Способы задания сечения весьма разнообразны, наиболее распространенным из них является способ задания секущей плоскости тремя точками, не лежащими на

одной прямой. При этом, если многогранником, сечение которого строится, является призма, то внутреннее проектирование на плоскость нижнего основания выполняется параллельное. Его направлениеопределяется боковым ребром призмы. Если же многогранником является пирамида, то выполняется внутреннее центральное проектирование на плоскость основания. Центром проектирования является вершина пирамиды, в которой сходятся все боковые ребра.

В основе решения задач на построение сечений лежит принцип расширения числа заданных элементов, который заключается в следующем: с помощью ранее заданных точек, прямых и плоскостей на изображении определяют дополнительные точки, прямые и плоскости как заданные элементы изображения относительно плоскости, принятой за основную. При этом принято придерживаться следующей схемы решения позиционных задач:

1) Установление фактора полноты изображения или обеспечение его полноты заданием дополнительных элементов, если оно неполное.
2) Применение принципа расширения числа заданных элементов с целью отыскания путей построения требуемых точек пересечения.
3) Фактическое выполнение на изображении построений, связанных с расширением заданных элементов, и, как результат этих графических операций, эффективное построение требуемых точек пересечения.

Доказательство и исследование не входят в указанную схему, так как они проводятся после выполнения решения. Если анализ и построение выполнены строго обоснованно, то необходимость в доказательстве часто просто отпадает. Исследование же обычно относится не к фактически выполненному построению, а к возможным или невозможным построениям, в зависимости от различных положений элементов данного полного изображения, и не играет значительной роли при решении позиционных задач.

3. Опорные позиционные задачи на построение

Решение всех позиционных задач базируется на решении простейших основных позиционных задач: построение точки пересечения данной прямой с данной плоскостью; построение линии пересечения данной плоскости с основной плоскостью; построение точки пересечения данных прямой и плоскости, заданной тремя точками. Эти задачи относятся к опорным позиционным задачам.

Задача 4

Построить точку пересечения заданной прямой *AB* с основной плоскостью а.

Решение

Пусть Л$_р$ B_x — вторичные проекции точек *A и B*. В случае внутреннего параллельного проектирования AA_{ℓ} || SS^рНС. 34 а), в случае центрального *A A*, и 86, пересекаются в центре проектирования *S* (рис. 34 б). /I, и В, принадлежат плоскости а. Точка *X* — точка пересечения *AB* и A_XB_X будет точкой пересечения прямой *AB* с плоскостью а. Если же *AB\A^B$_V$* то заданная прямая параллельна основной плоскости.

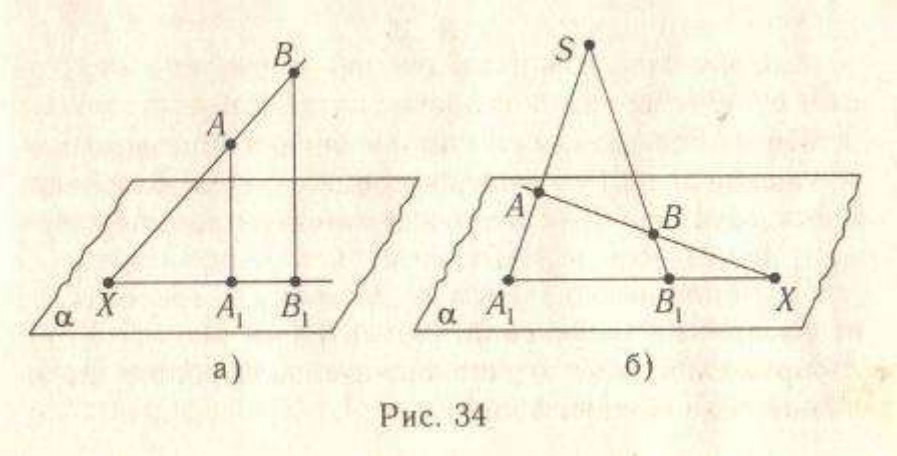


Рис. 34

Задача 5

Плоскость задана тремя точками *P'(P, Я,), Q\Q, Q^)* и *R'(R, R)).* Построить линию пересечения ее с основной плоскостью а, то есть построить след плоскости *PQR.*

Решение

Задача сводится к предыдущей. Находится точка пересечения прямой *PQ* с плоскостью а — точка *X;* точка пересечения прямой *PR* с плоскостью а —■ точка *Y,* где а — изображение основной плоскости. Тогда *XY*— след плоскости *PQR* (рис. 35 а) и б)), так как две плоскости пересекаются по прямой и прямая определяется двумя точками однозначно.

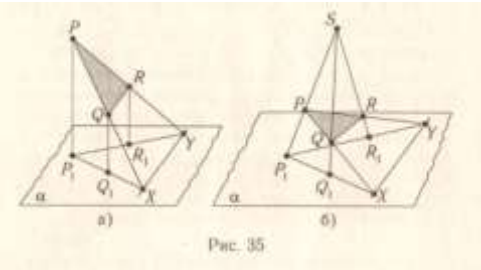


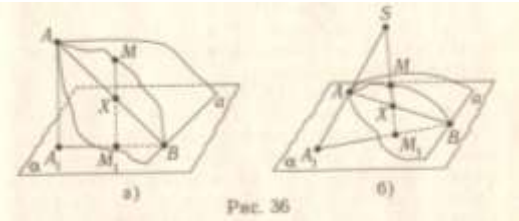
Рис. 35

Задача 6

Плоскость задана следом *а* и точкой *А,* не принадлежащей следу. Построить изображение точки пересечения этой плоскости с проектирующей прямой ЛШ,.

Решение

Рассмотрим проектирующую плоскость ЛЛ,ЛШ,. Она пересекает основную плоскость а по прямой A_tM_t (рис. 36 а) и б)). Пересечение A_JM_J со следом дает точку *В*. *В* принадлежит плоскости сечения, так как *В* принадлежит следу и по построению принадлежит плоскости ЛЛ|ММ,. Аналогичными свойствами обладает точка *А,* то есть *А я В* — общие точки двух плоскостей — плоскости AA_iMM_i и плоскости сечения. Следовательно, *АВ* — прямая пересечения двух плоскостей. А так как прямые *АВ* и ММ, лежат в одной плоскости $AA_{\ell}MM$\, то пересечение MM_X и *АВ* дает искомую точку *X*.

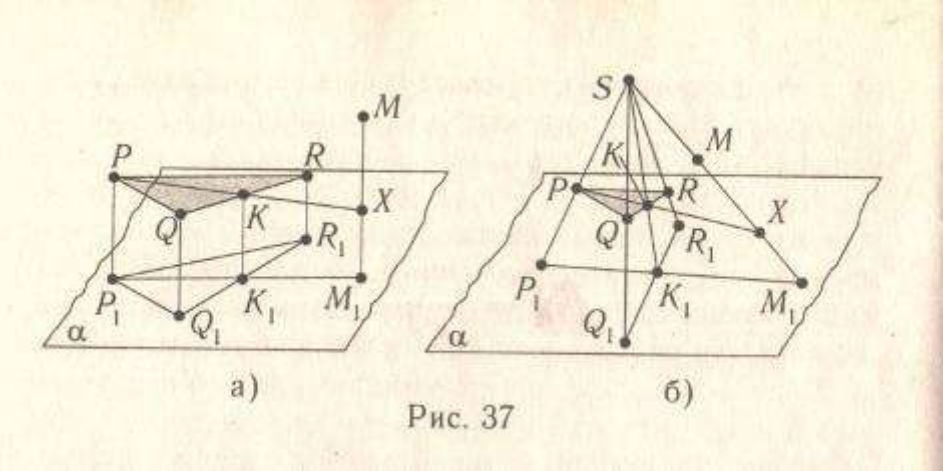


Задача 7

Плоскость задана тремя точками *P, Q, R,* не лежащими на одной прямой. Найти точку этой плоскости на проектирующей прямой MM_{ℓ}.

Решение

Если плоскость задана, значит, указана основная плоскость, аппарат внутреннего проектирования и известны вторичные проекции P_p Q_{ℓ}, /?, точек *P, Q, R,* принадлежащих основной плоскости а. Точка М, также принадлежит плоскости а.



Рассмотрим плоскость $PP_{\ell}MM_V$ пересекающую а по прямой Р|М, (рис. 37 а) и б)). Так как точки Я,, $M_{(}$, <5_p /?j лежат в одной плоскости, то можно построить точку пересечения прямых Р|$M_{(}$ и (?,/?,. Пусть это будет точка /C_t_ Так как K_{ℓ} принадлежит (?,/?(, то существует точка *К,* принадлежащая *QR,* вторичной проекцией которой является точка *К у,* при этом в случае а) *КК)* \\ *РР*\, а в случае б) *К* принадлежит S/C,. Отсюда следует, что она находится однозначно. Точки *К* и *Я* принадлежат плоскости сечения н проектирующей плоскости PP_XM. Следовательно, прямая Я/С является их линией пересечения. *РК* лежит в плоскости сечения и в одной плоскости с прямой MM_v Следовательно, их пересечение — точка *X* — является искомой. Задача решена. Эта задача позволяет найти точку на любом ребре, на любой прямолинейной образующей данной фигуры, если будут заданы три точки плоскости сечения, не лежащие на одной прямой.

4. Метод следов построения сечений

Сущность метода следов при решении позиционных задач на построение сечений тел заключается в эффективном построении общих точек, а по ним и прямых пересечения (следов) секущей плоскости с плоскостями граней, диагональных или осевых сечений тела. Обычно решение задачи на построение сечения методом следов начинается с построения прямой пересечения секущей плоскости с основной плоскостью. Эту прямую называют **главным следом.** (Его построениебазируется на опорных задачах 4 и 5.) Затем с помощью главного следа находятся общие точки секущей плоскости с плоскостями граней, диагональных или осевых сечений, что приводит к возможности эффективного построения следов секущей плоскости на этих плоскостях, то есть к решению задачи. (Эти построения базируются на опорной задаче 6.) Рассмотрим конкретный пример.

Задача 8

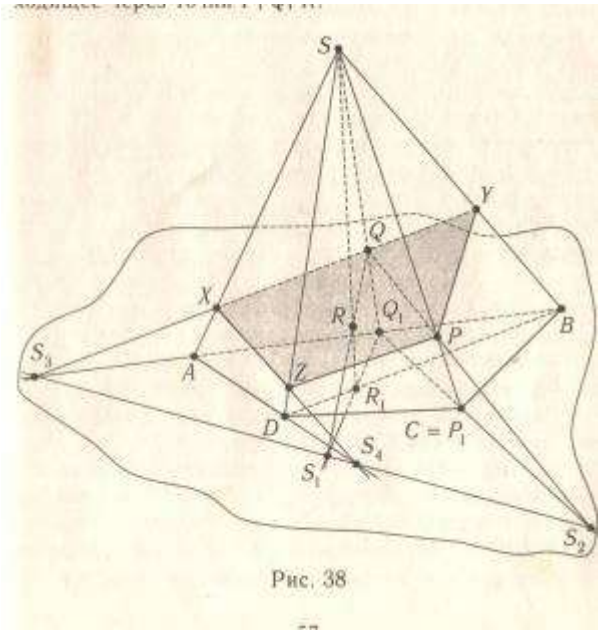


Рис. 38

На ребре *SC* пирамиды *SABCD* задана точка *Я*, в грани *SAB* — точка *Q,* а внутри пирамиды в плоскости *SBD* задана точка *Я*, (рис. 38). Построить сечение, проходящее через точки *Я*, *Q, R.*

Решение

В качестве основной плоскости возьмем плоскость основания пирамиды, вершину *S* — за центр внутреннего центрального проектирования. Пусть R_{ℓ} и Q_{ℓ} — вторичные проекции точек *R* и *Q.* Так как *Q* лежит в грани *SAB,* то Q_t — точка пересечения *SQ* и *AB.* Так как *R* лежит в плоскости *SBD,* то R_{ℓ} — точка пересечения *SR и BD,* Так как точка *Я* лежит на ребре *SC,* то P_x совпадает с С. Теперь все элементы являются заданными, изображение полное, и мы можем приступить к построению сечения. Построим след плоскости *PQR.* S[— точка пересечения *QR* и Q_iR_l — является точкой пересечения прямой *QR* с плоскостью основания. 5_2 — точка пересечения *QP* и Q_iP_l — является точкой пересечения *QP* с плоскостью основания. Следовательно, прямая S|5_2 — след плоскости *PQR.*

Рассмотрим теперь плоскость грани *SAB,* в которой имеется точка *Q* плоскости сечения. Плоскость *SAB* пересекает основную плоскость по прямой *AB.* Прямые *AB* и 5[S_2 лежат в одной плоскости. Пусть 5_3 — точка их пересечения. Тогда 5_3 и *Q* — общие точки плоскости сечения и плоскости грани *SAB.* Следовательно, плоскость грани *SAB* и плоскость сечения пересекаются по прямой S_3Q. Прямая *S^Q* и ребра

5-4, *SB* лежат в плоскости *SAB,* поэтому можно найти их точки пересечения. Пусть *X* -— точка пересечения прямой *SA* с прямой *SQ,* а У — точка пересечения прямой 56 с прямой *SQ.* Тогда *XY* — след плоскости сечения в грани *SAB.*
Рассмотрим теперь плоскость грани *SAD,* в которой имеется точка *X* плоскости сечения *PQR.* След плоскости *SAD* — прямая *AD* — пересекает след плоскости сечения *5^2* в точке 5_4. S_4НI — общие точки плоскостей *SAD* и *PQR,* следовательно, эти плоскости пересекаются по 5_4Л. Так как ребро *SD* и прямая S_4X лежат в одной плоскости *SAD,* то точка пересечения *SD*
и S_4X — точка Z — лежит в плоскости сечения. Следовательно, *XZ* — след плоскости сечения в грани *SAD.* Очевидно, *ZP* — след плоскости сечения в грани *SDC, PY* — след плоскости сечения в грани *SCB.* Таким образом, четырехугольник *XYPZ* — искомое сечение.

Замечание

При решении этой задачи мы неоднократно использовали опорную задачу 6, рассматривая главный след плоскости сечения S_XS2 и точки плоскости сечения, не принадлежащие следу.

5. Метод внутренних проекций

Сущность метода внутренних проекций при решении задач на построение сечений заключается в том, что по проекциям точек секущей плоскости на основную плоскость находятся дополнительные точки секущей плоскости. Это возможно по той причине, что каждая точка секущей плоскости проектируется на основную плоскость в виде лишь одной вполне определенной точки при выбранном аппарате проектирования. При этом проекции искомых точек секущей плоскости на основной плоскости выбираются так, чтобы они были связаны с проекциями точек, определяющих секущую плоскость, и чтобы число графических операций при решении задач было минимальным.

Рассмотрим применение этого метода на конкретной задаче.

Задача 9

Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками ЛГ, *N', P',* лежащими соответственно на боковых гранях *A'B'B\A'$_V$ E'D'D\E* и *B'C'C\B*.

Решение

Пусть $ABCDEA_lB_lC_lD_lE_l$ — изображение данной пятиугольной призмы, *M, N, P* — изображения данных точек плоскости сечения (рис. 39).

Установим свойство полноты изображения. За основную плоскость возьмем плоскость основания призмы, а за направление внутреннего проектирования — направление бокового ребра. Относительно аппарата внутреннего проектирования изображение будет полным. Вторичные проекции данных точек *M, N, P* находятся однозначно. M_y MM_ℓ\\$AA_V$ М.е'л'в,; *Ny* NN_X \\$AA_V$ W, Е E_XD_ℓ; Р,: *PP*,\\$AA_V$ *P* е *D C '*. Таким образом, изображение плоскости *MPN* и пря-

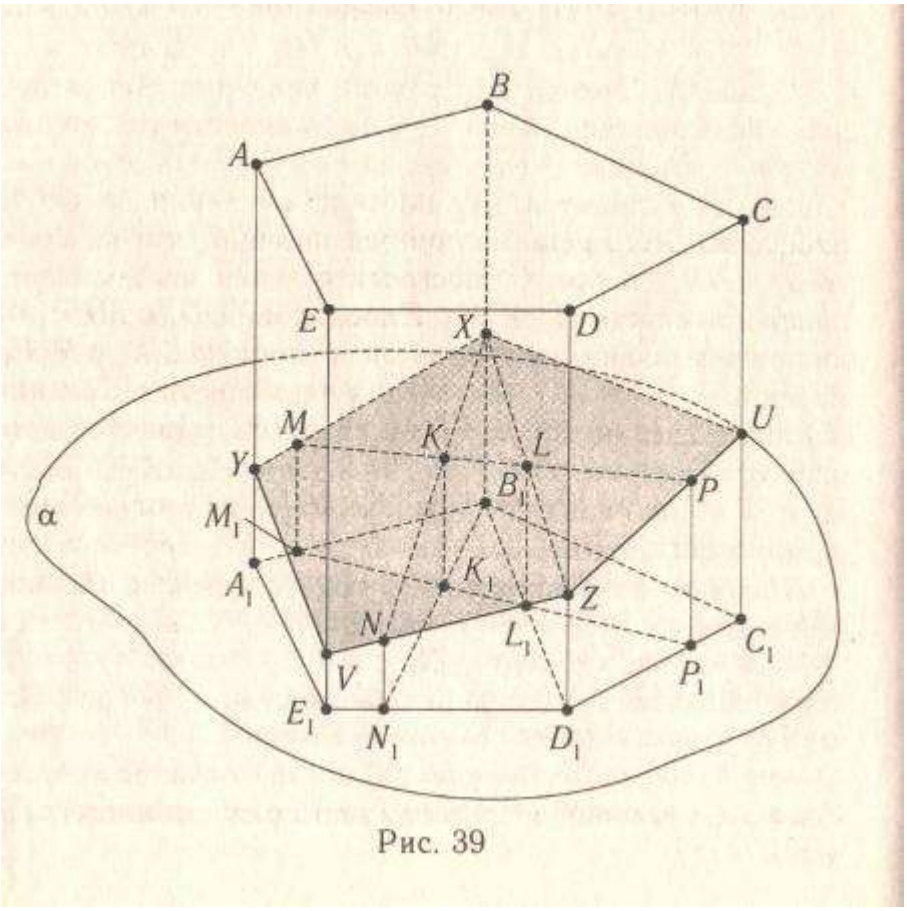


Рис. 39

мых *MN, MP, NP* — полное. Решим опорную задачу 7 относительно ребра BB_V точки *N* и проектирующей плоскости *MPP*\M_ℓ, проходящей через две другие точки

плоскости сечения. Плоскости MPP_lM_l и BB_lN_lN пересекают основную плоскость по прямым N_lB_l н M_tP_v Пусть K_1 — точка пересечения этих прямых. Так как 7С[принадлежит *M^P^,* то она является вторичной проекцией точки *К* прямой *MP.* Точка *К* на изображении строится однозначно из условий: KK_l |] $AA_{(}$, *К* е *MP.* Точки *К* и *N* — точки плоскости сечения, расположенные в плоскости ВВ,Л^|Л/. Следовательно, плоскость *BB^N^* пересекается с плоскостью сечения по прямой *NK.* Точка *X* пересечения прямой *NK* и ребра BB_{ℓ} является искомой точкой плоскости сечения, расположенной на ребре BB_Y Плоскости *MNP* и ABB_X пересекаются по прямой *MX.* Прямая *MX* пересекает ребро ,4Л, в точке У. Следовательно, *XY* — след плоскости сечения на грани ABB_XA_X.
Найдем теперь точку плоскости сечения на ребре DDj. Для этого решим опорную задачу 7 относительно ребра DD_V точки *X* плоскости сечения и проектирующей плоскости MPP_XM_V Плоскости XDD_{ℓ} и MPP_lM_1 пересекают основную плоскость по прямым B_XD_X и M_lP_1. Пусть Lj — точка пересечения этих прямых. Так как L| принадлежит *M^P^,* то она является вторичной проекцией точки *L* прямой *MP,* при этом LL| \\AA_V Точки *L* и *X* — точки плоскости сечения, расположенные в плоскости XDD_t. Следовательно, *XL* пересекается с *DD,* в точке *Z,* принадлежащей плоскости сечения. Тогда точка пересечения прямой *ZP* с ССj — точка *U,*— точка пересечения *ZN* с ££j — точка *V* — есть точки плоскости сечения, расположенные на ребрах. Пятиугольник *XUZVY* — искомое сечение.
Рассмотрим особо случай, когда точки, задающие плоскость сечения, не лежат на поверхности многогранника.

Задача 10
Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, из которых одна лежит внутри пирамиды, а две вне ее.
Решение
Пусть *SABCD* — изображение данной пирамиды. Основная плоскость — плоскость основания, внутреннее проектирование — центральное с центром в точке 5. Пусть точка *M'(M, M_x)* лежит внутри пирамиды и точки *K\К, $К_x$), N'(N,* Л/,) — вне пирамиды (рис. 40).

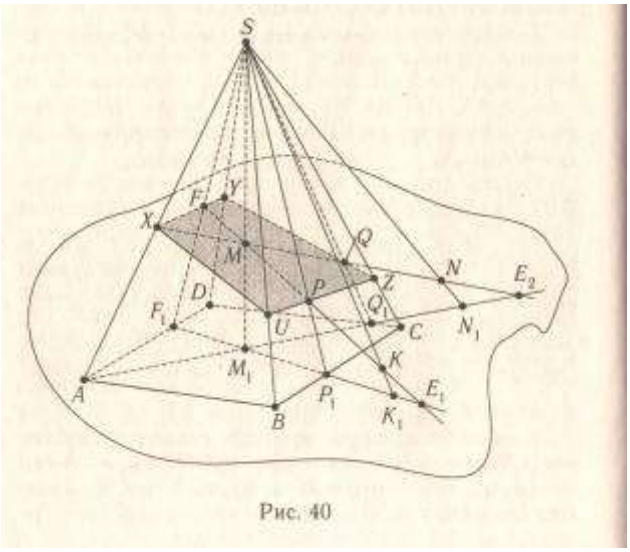


Рис. 40

Построим точки пересечения прямой *МК* с поверхностью пирамиды. Рассмотрим плоскость *SMK.* Ее след М|ЛГ(пересекает *AD* и *BC* соответственно в точках *F*^

и Р,. F, и P_x являются вторичными проекциями точек *F* и *P,* принадлежащих прямой *MP* и расположенных соответственно в гранях *SAD* и *SBC: F* е *МК* и *F* е *SF,, Ре SP*^ и Ре *МК.* Аналогично строим точки пересечения прямой *MN* с поверхностью пирамиды — точки *X*
и *Q,*
Далее построение сечения очевидно. Проводим прямую *XF,* пересекающую ребро пирамиды *SD* в точке *Y.* Затем проводим прямую *YQ,* она пересекает ребро пирамиды *SC* в точке Z, и, наконец, прямая *ZP* пересекает ребро *SB* в точке *U.* Соединив точки *X* и *U,* получим искомое сечение пирамиды *XYZU.*
Иногда выгодно применять искусственные методы. Рассмотрим один из них.

6. Метод дополнения n-угольной призмы (пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды)

Суть этого метода состоит в следующем: данную призму (пирамиду) достраиваем до треугольной призмы (пирамиды), строится сечение полученной треугольной призмы (пирамиды), искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы (пирамиды). Рассмотрим сущность этого метода на конкретных примерах.

Задача 11

Дано изображение пятиугольной пирамиды *MABCDE;* точки *F* и *T* лежат соответственно на ребрах *AM* и *MC* пирамиды. Построить сечение пирамиды плоскостью FS7" (рис. 41).

Решение

1. Достраиваем данную пятиугольную пирамиду *MABCDE* до треугольной; для этого строим точку *К*

как точку пересечения прямых *AB* и *DE,* точку *P* как точку пересечения прямых *BC* и *DE,* потом проводим *МК* и *МР* и получаем треугольную пирамиду *МКВР,* частью которой является данная пятиугольная пирамида.

2. Строим сечение пирамиды *МКВР* плоскостью *FBT.* Точка *X* получается в результате пересечения прямых *FB* и *КМ,* а точка *Y* — в результате пересечения прямых *BT* и *МР,* следовательно, треугольник *XBY* — сечение пирамиды *МКВР*

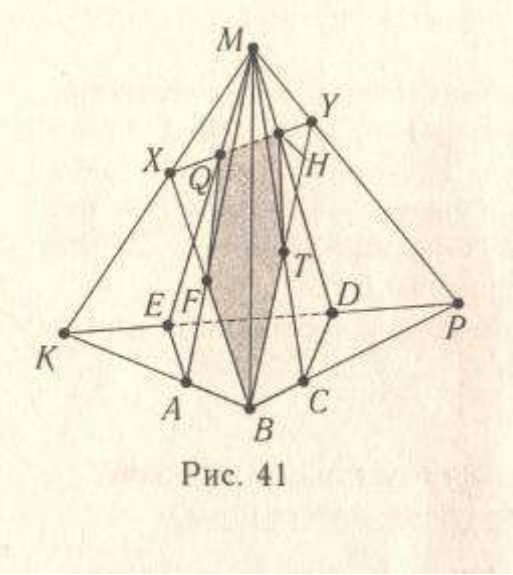


Рис. 41

C

B Рис. 41

плоскостью *FBT.*

3. Точки *Q* и *H* получаются в результате пересечения прямой *XY* с ребрами *ME* и *MD. QFBTH* — искомое сечение данной пирамиды.

Задача 12

Дано изображение пятиугольной призмы, на котором даны три точки, две из которых лежат на боковых ребрах призмы, а одна принадлежит вершине основания. Построить сечение, проходящее через эти три точки.

Решение

Пусть $ABCDEA_iB_lC_lD_iE_l$ — пятиугольная призма, а точки *M* и *N* принадлежат соответственно ребрам BB_l и DD_X\ MNC_l — секущая плоскость (рис. 42). 1. Достраиваем данную пятиугольную призму до треугольной; для этого строим

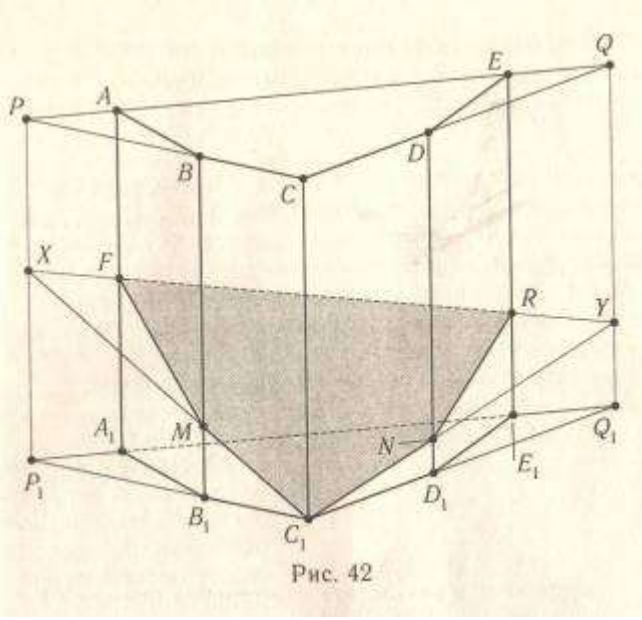


Рис. 42

точку P как точку пересечения прямых AE и BC, точку Q как точку пересечения прямых CD и AE и точки P, и Q_x как точки пересечения прямых A_XE_f и C_fB_V A_lE_l и CjD$_f$. Проводим прямые PPj и QQ_V Мы получили треугольную призму $PCQP\backslash C\backslash Q_V$ частью которой является данная пятиугольная призма.

2. Строим сечение призмы $PCQP_JC_fQ_J$ плоскостью MC_fN: точка X получается в результате пересечения прямых C_fM и PP_V а точка Y получается в результате пересечения прямых C^N и $QQ\backslash$, следовательно, треугольник XC_iY — сечение призмы $PCQP_lC_JQ_l$.

3. Прямые AA_J и Я£, пересекаются с прямой XY соответственно в точках F и R, FMC_lNR — искомое сечение данной пирамиды.

7. Метод деления n-угольной призмы (пирамиды) на треугольные призмы (пирамиды)

Суть этого метода состоит в следующем: из данной л-угольной призмы (пирамиды) выделяется та треугольная призма (пирамида) *n,* на боковых ребрах которой лежат точки, определяющие искомое сечение. Строится сечение этой треугольной призмы (пирамиды), затем строятся сечения тех треугольных призм (пирамид), которые имеют общие части с фигурой *n.* Рассмотрим сущность этого метода на конкретных примерах.

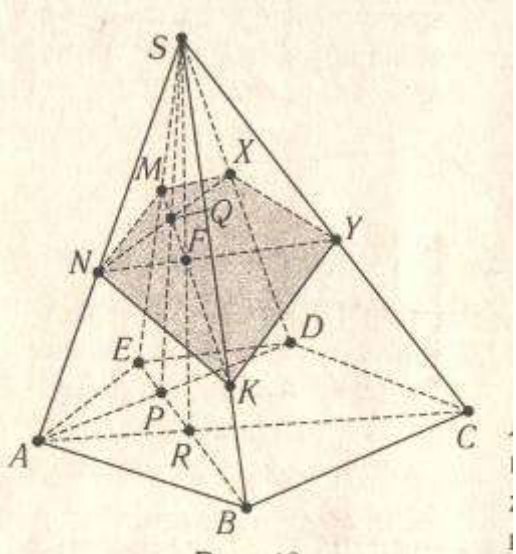


Рис. 43

Задача 13

Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками *M, N и K на* боковых гранях.

Решение

Пусть *SABCDE* — данная пятиугольная пирамида, точка *M* лежит на ребре *SE,* точка *N* — на ребре *SA* и точка *K* — на ребре 5В (рис. 43).

1. Треугольник *MNK* является сечением треугольной пирамиды *SABE,* с этой пирамидой имеют общие части пирамиды *SABC* и *SADE.*

2. Точка *R* получается в результате пересечения прямых *AC* и *BE,* точка *P* — в результате пересечения прямых *AD* и *BE,* точка *F* — в результате пересеч ния прямых М/С и *SR,* точка *Q* — в результате пересечения прямых *MK* и *SP.*

3. Плоскость *SDA* пересекает плоскость *MNK* по прямой *NQ,* а прямые *NQ* и *SD* пересекаются в точке *X,* причем точка *X* принадлежит секущей плоскости *MNK.*

4. Плоскость *SCA* пересекается с плоскостью *MNK* по прямой *NF.* Прямая *NF* пересекает прямую *SC* в точке *Y,* причем точка *Y* принадлежит секущей плоскости *MNK.*

5. *MNKYX* — искомое сечение.

Задача 14

Построить сечение четырехугольной призмы, проходящее через три точки, две из которых лежат на ребрах призмы, а одна - - на боковой грани.

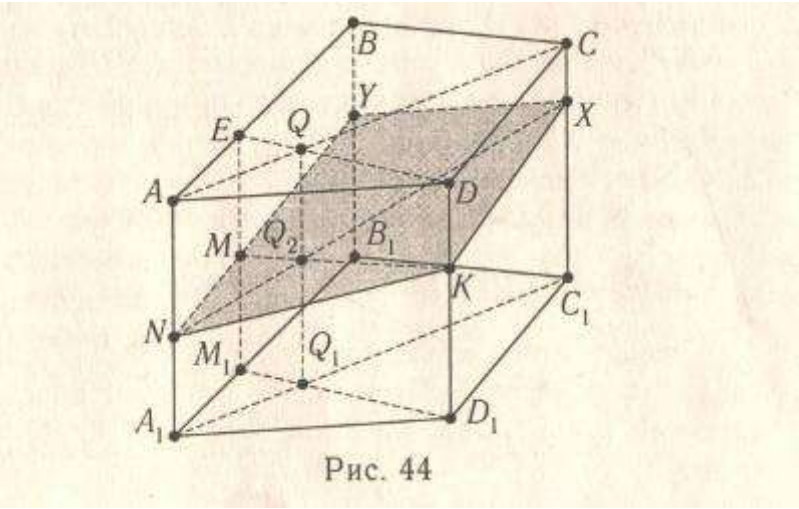


Рис. 44

Решение

1. Пусть $ABCDA_lB_lC_lD_l$ — четырехугольная призма, точка M принадлежит грани AA^B^B, а точки N *и* K принадлежат ребрам AA_{ℓ} и DD_{ℓ} (рис. 44). M_XE $\backslash\backslash AA_{\ell}$, где M_1 — точка $A_{\ell}B_{\ell}$, E — точка AB и M_XE проходит через M.

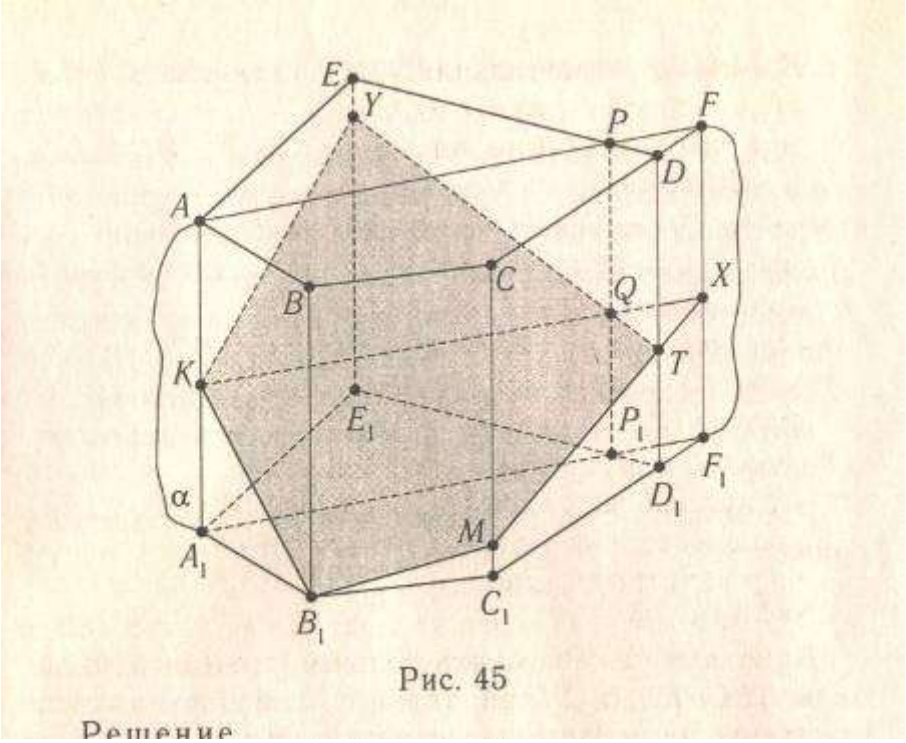
2. Видим, что треугольник MNK является сечением треугольной призмы $ADEA_iD_lM_l$, с этой призмой имеют общие части призмы $ADCA_lD_iC_i$ и ЛВСЛ,В,С,.
3. Точка (?, получается в результате пересечения прямых A_{ℓ}С, и M(Dр точка Q — в результате пересечения прямых ED и AC.
4. Плоскость ЛСС, пересекает плоскость EDD_l по прямой QQ_V а прямая QQ_l пересекает прямую MK в точке Q_2.
5. Точки N и Q_2 принадлежат плоскости CC_tA_v поэтому прямые NQ_2 и CC_1 пересекаются в точке X, принадлежащей секущей плоскости MNK- Остальное построение очевидно.
6. Прямые NK и MN лежат в одной плоскости MNK, и прямая NM пересекает прямую BB_{ℓ} в точке Y, причем точка Y принадлежит секущей плоскости MNK- Точки X *и* K лежат в плоскости MNK, значит, и прямая KX тоже лежит в этой секущей плоскости MNK.
7. $NKYX$ — искомое сечение.

8. Метод параллельных прямых

В основу этого метода положено свойство параллельных плоскостей: «Прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельны между собой». Рассмотрим сущность этого метода на конкретном примере.

Задача 15

Дано изображение прямоугольной призмы $ABCDEA_lB_iC_iD_lE_l$. Точки *К* и *М* лежат соответственно на ребрах ЛЛ, и CC_l. Построить сечение призмы плоскостью *КВ^М* (рис. 45).



Решение

1. Через прямую AA_{ℓ} проведем плоскость а, параллельную плоскости ВВjС,; точка *Р* получается в результате пересечения прямой *ED* с плоскостью а, а точка Р, —-в результате пересечения прямой 5jO(с плоскостью а, причем прямая *АР* параллельна прямой *ВС* и прямая A_lP_l параллельна прямой B_xC_v Прямые *CD* и С,D| пересекают плоскость а соответственно в точках *F* и /■",. Очевидно, что прямая A_lF_l параллельна прямой B_lC_l и прямая *AF* параллельна прямой *ВС,* а так как плоскость а параллельна грани BB_lC_l, то секущая плоскость KB_XM пересечет плоскость а по прямой *КХ* параллельной прямой $B_{\ell}M$, где точка *Х* принадлежит прямой FF_X.

2. Точки *Q, Т* и *Y* получаются в результате пересечения соответственно прямых PP_l и *КХ, МХ* и *DD* EE_{ℓ} и *TQ.*

3. Пятиугольник KB_XMTY — искомое сечение.

9. Метод переноса секущей плоскости

Суть этого метода состоит в следующем: строится такое вспомогательное сечение данного многогранника, которое удовлетворяет следующим требованиям:

1) оно должно быть параллельно секущей плоскости;
2) в пересечении с поверхностью данного многогранника образуется треугольник.

После этого искомое сечение строится на основании свойств прямых, по которым две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью.

Рассмотрим сущность этого метода на конкретных примерах.

Задача 16

Дано изображение пятиугольной усеченной пирамиды $ABCDEA_lB_xC_xD_lE_x$. Точки *К, М* и *Р* лежат соответственно на ребрах пирамиды AA_V BB_l и ££,. Построить сечение пирамиды плоскостью *КРМ* (рис. 46).

Решение

1. Строим прямую B_lK_X, параллельную прямой *КМ,* прямую /CJPJ, параллельную прямой *КР.* Отсюда треугольник $K_lP_lB_1$ является сечением усеченной пирамиды, причем плоскость $K_lP_lB_1$ параллельна плоскости *КРМ.*
2. Точки *Н* и *О* получаются в результате пересечения соответственно прямых A_iD_i и A_XC_X с прямой P_XB_X.
3. Строим прямую KO_X, параллельную прямой K_XO, и прямую $KИ_X$, параллельную прямой K_lH, причем точка O_x принадлежит прямой $A_XC_{X>}$ точка Я, — прямой A_lD_l, Точки O_x и //, принадлежат секущей плоскости *РКМ.* Остальное построение очевидно,
4. Точка *L* получается в результате пересечения KO_X с ребром ОС,,

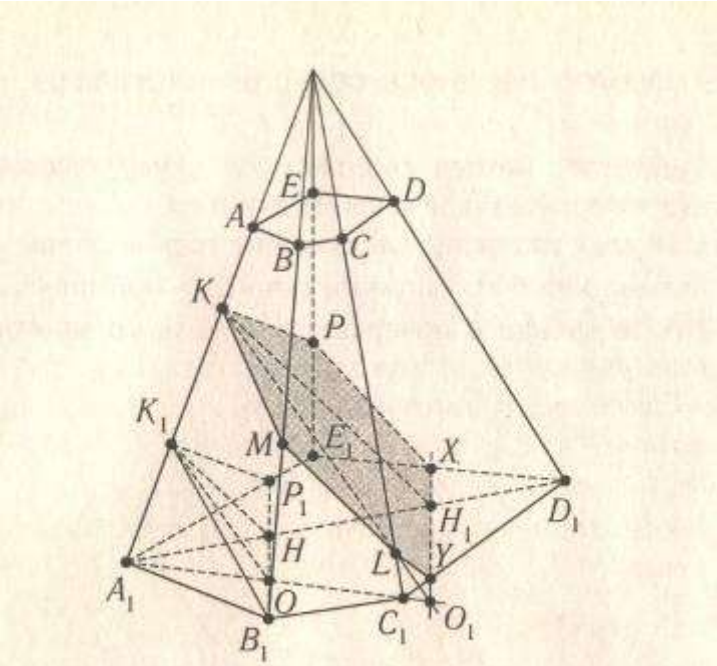


Рис. 46

5. Строим точки *X* и *Y* как точки пересечения прямых O_1H_1 и E_lD_X, O_lH_l и C,D|.
6. Шестиугольник *KPXYLM* — искомое сечение.

Задача 17

Построить сечение пятиугольной призмы, проходящее через три точки, расположенных на трех соседних боковых ребрах.

Решение

Пусть $ABCDEA_xB_iC_iD_lE_i$ — данная пятиугольная призма, а точки *M, N* и *К* соответственно лежат на ребрах AA_X, ££, и BB_X (рис. 47). 1. Строим прямую B_1P, параллельную прямой *КМ,* а прямую *PQ,* параллельную прямой *MN,* где точка *Q* лежит на прямой A_XE_l. Треугольник B_lPQ является сечением данной призмы, причем плоскость B_XPQ параллельна плоскости *KMN.*

71

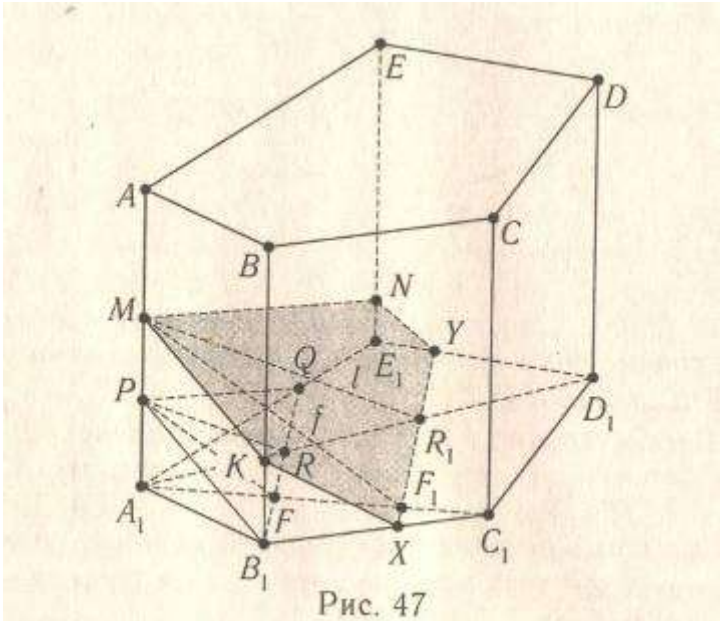


Рис. 47

2. Точки *R* и *F* получаются в результате пересечения прямых A_XD_l и £,(?, A_lC и B_XQ.
3. Проводим прямые / и / параллельно соответственно прямым *PR* и Я/\ через точку *M.*
4. Находим точки /?j и F_l как точки пересечения прямой / с прямой $Л_1O_l$ и прямой / с прямой /4]C].
5. Прямая Z?^! пересекает прямые B_iC_i и £|D] соответственно в точках *X* и *Y.*
6. *XYNMK* — искомое сечение.

Задача 18

На изображении пирамиды *SABCDE* построить сечение, проходящее через точки *M, N* и *К,* причем эти точки лежат на трех соседних боковых ребрах *SE, SD* и *SC* (рис. 48).

Решение

1. Строим прямую *CP* параллельно прямой *K.N,* точка *P* лежит на ребре пирамиды *SD.* Строим прямую

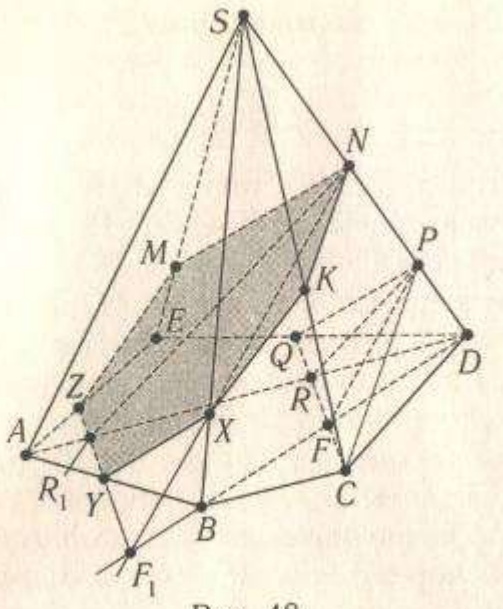


Рис. 48

PQ, параллельную *NM*, точка *Q* параллельна плоскости *DE*.
2. Треугольник *QPC* является сечением пирамиды, причем плоскость *QPC* параллельна плоскости *MNK*-
3. Точки *R* и *F* получим как точки пересечения соответственно прямых *AD* и *BD* с прямой *QC*. Проводим *PR* и *PF*.
4. В плоскости *SBD* проводим прямую NF_{ℓ}, параллельную *PF*, где F_l — точка *BD*.
5. В плоскости *SBA* проводим прямую NR_V параллельную *PR*, где R_t — точка *AD*. Точки R_t и F_x принадлежат плоскости *MNK* и плоскости основания.
6. Точки *Y* и *Z* получаются как точки пересечения соответственно прямых F_iR_l и *AB*, $P^\wedge_{\ell}$ и *AE*. Точка *X* — точка пересечения *SB* и NF_t.
7. Шестиугольник *XYZMNK* — искомое сечение.

Список использованной литературы

1. Аргунов Б. И., Балк М, Б. Геометрические построения на плоскости. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1957.

2. Казаков П. Г. Параллельные проекции и методы и решения конструктивных задач. М.: Учпедгиз, 1960.

3. Орехов П. С. Изображения в стереометрии. Ижевск: Удмуртия, 1981.

4. Четверухин Н. Ф. Изображения в курсе геометрии. М.: Учпедгиз, 1958.

5. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений.
М.: Учпедгиз, 1952.